



ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»



Для
билета

Вариант задания

1

Лист работы 1 из 4

№1,
В ур-ве $x^2 - x - a(a-1) = 0$, есть два корня,
если $D = 1 + 4(a(a-1)) > 0$. По соф. т. Введем:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = a(a-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 > \frac{1}{3} \\ x_2 > \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 - x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_1^2 = a^2 - a \\ x_1 > \frac{1}{3} \quad x_2 > \frac{1}{3} \Rightarrow \\ x_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$(1 - x_1) \cdot x_1 = a(a-1) \Rightarrow (1 - x_1)x_1 = (1 - a)a$$

$$\frac{2}{3} > x_1 > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} > x_2 > \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$$

$$x_1 + a = x_1^2 + a^2$$

$$\begin{cases} x_1 = a \\ \frac{2}{3} > x_1 > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} > a > \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} > x_2 > \frac{1}{3} \\ x_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$4(a(a-1)) \neq -1, \quad a(a-1) \neq -\frac{1}{4}, \quad a \neq \frac{1}{2}$$

(взяли из $x_2 = 1 - x_1$, при том $x_1 > \frac{1}{3}$ и $x_2 > \frac{1}{3}$)
Ответ: При $a \in (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$, или же в другой записи $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$ и $a \neq \frac{1}{2}$.



N2,

чтобы $\sqrt{-y-x} + 1 > 0$, нужно
чтобы $-y-x \geq 0$, так иначе корень не имеет,
а раз в начале стоит минус, то $-0=0$

$$y-x=0 \Rightarrow y=x.$$

Берём второе ур. $(-6 + \sqrt{3}x + (\sqrt{3}+2) \cdot \sqrt{4-4\sqrt{3}}) \cdot |x| + 5 - \sqrt{3}x = 0$

$$1) (-\sqrt{3}+2) \cdot \sqrt{4-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2) \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}^2 \\ = (2+\sqrt{3})/(2-\sqrt{3}) = 4-x=1.$$

$$2) -6 + \sqrt{3}x + 1 = \sqrt{3}x - 5.$$

$$3) (\sqrt{3}x-5) \cdot |x| + 5 - \sqrt{3}x = 0. \\ |x| = 1.$$

$x_1 = 1 \Rightarrow$ Берём из того выраж. $x=y$,
 $x_2 = -1$ и получаем пары $(1; 1), (-1; -1)$

Ответ: $(-1; -1), (1; 1)$.

N4,

Если $2|x-2| - a - x = 2$ ур-е, чтобы всегда им
корень равенство выполнялось,
при этом решения ≥ 0 и ≤ 5 . ($0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 5$)

$$2|x-2| - a - x = 2.$$

$$2|x-2| = x + a + 2.$$

$$2|x-2| = x + a + 2.$$

$$2x-2-x-2-a=0,$$

$$x-4-a=0$$

$$x_1 = a+4, \text{ раз } 0 \leq x_1 \leq 5, \text{ то}$$

$$0 \leq a+4 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq a \leq 1.$$

Ответ: $-13 \leq a \leq 2$.
или
тогда при $a \in [-13; 2]$
тогда $2|x-2| = -(x+a+2)$

$$2|x-2| = -(x+a+2)$$

$$3x-2+a=0.$$

$$x_2 = \frac{2-a}{3}, \text{ раз } 0 \leq x_2 \leq 5, \text{ то}$$

$$0 \leq \frac{2-a}{3} \leq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -13 \leq a \leq 2.$$

Следующим

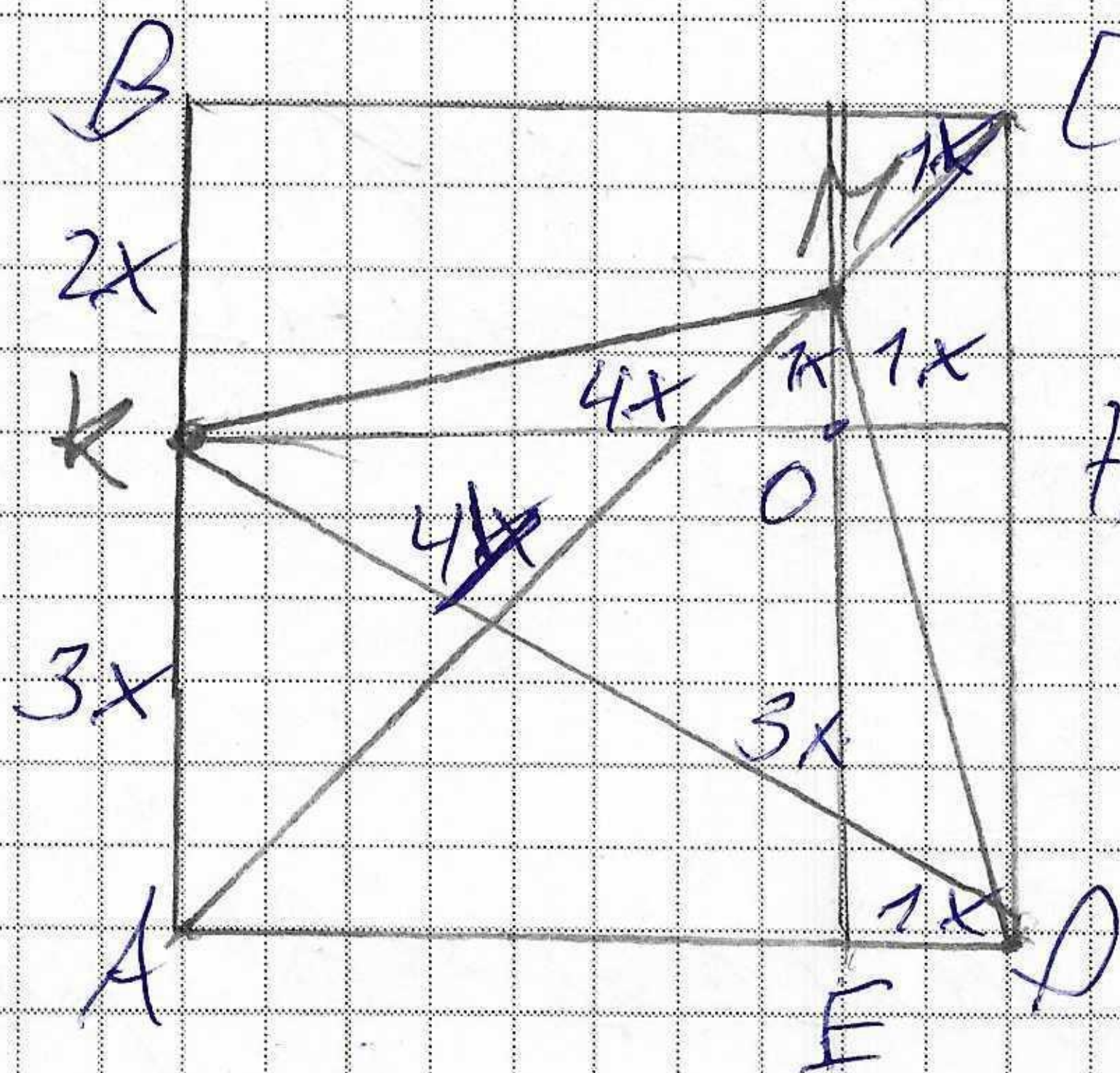
$$-4 \leq a \leq 1 \text{ и } -13 \leq a \leq 2$$

получим

$$-13 \leq a \leq 2$$



N3,



Дано: $ABCD - \square$.

$AK:KB = 3:2$

$\frac{ME}{AM} = \frac{1}{5}$

Найти: $\angle KMD$.

Решение.

Построим $KH_1 \parallel BC$ и $ME \parallel BA$, тогда по свойствам т.к. квадрата, зная что у \square стороны равны и взяв $\frac{1}{5}$ стороны за x , а $AC = 5x$ и, что O - пересечение KH_1 и ME , получим $KO = 4x$, $OM = 1x$, $OE = 3x$, $ED = 1x$. Тогда $ME = OE + OM = 4x$.

По т. Пифагора в $\triangle KMO$ и $\triangle MED$:

$$MO^2 + KO^2 = KM^2$$

$$ME^2 + ED^2 = MD^2$$

$$1x^2 + 16x^2 = KM^2$$

$$MD = \sqrt{ME^2 + ED^2}$$

$$KM = \sqrt{17x^2} = \sqrt{17}x \quad MD = \sqrt{x^2 + 16x^2} = \sqrt{17x^2}$$

Проведём KD .

Вспомогательная $ABCD - \square \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAB = 90^\circ$. А зная,

что $KA = 3x$, а $AD = 5x$

По всепользуемая

Вспомогательная $MD = \sqrt{17}x$,
по т. Пифагора вспомогательная,
что она равна в прямоугольнике,
но раз уж нас $OE \perp KH_1$, т.к.
 $AD \perp DC$ а $OE \parallel AB$ и $KH_1 \parallel AD$,
(т.к. квадрат $ABCD$) по все хорошо.



тк Тупорога в $\triangle KAD$:

$$KD^2 = KA^2 + AD^2$$

$$KD^2 = 9x^2 + 25x^2$$

$$KD = \sqrt{34x^2} = \sqrt{34}x$$

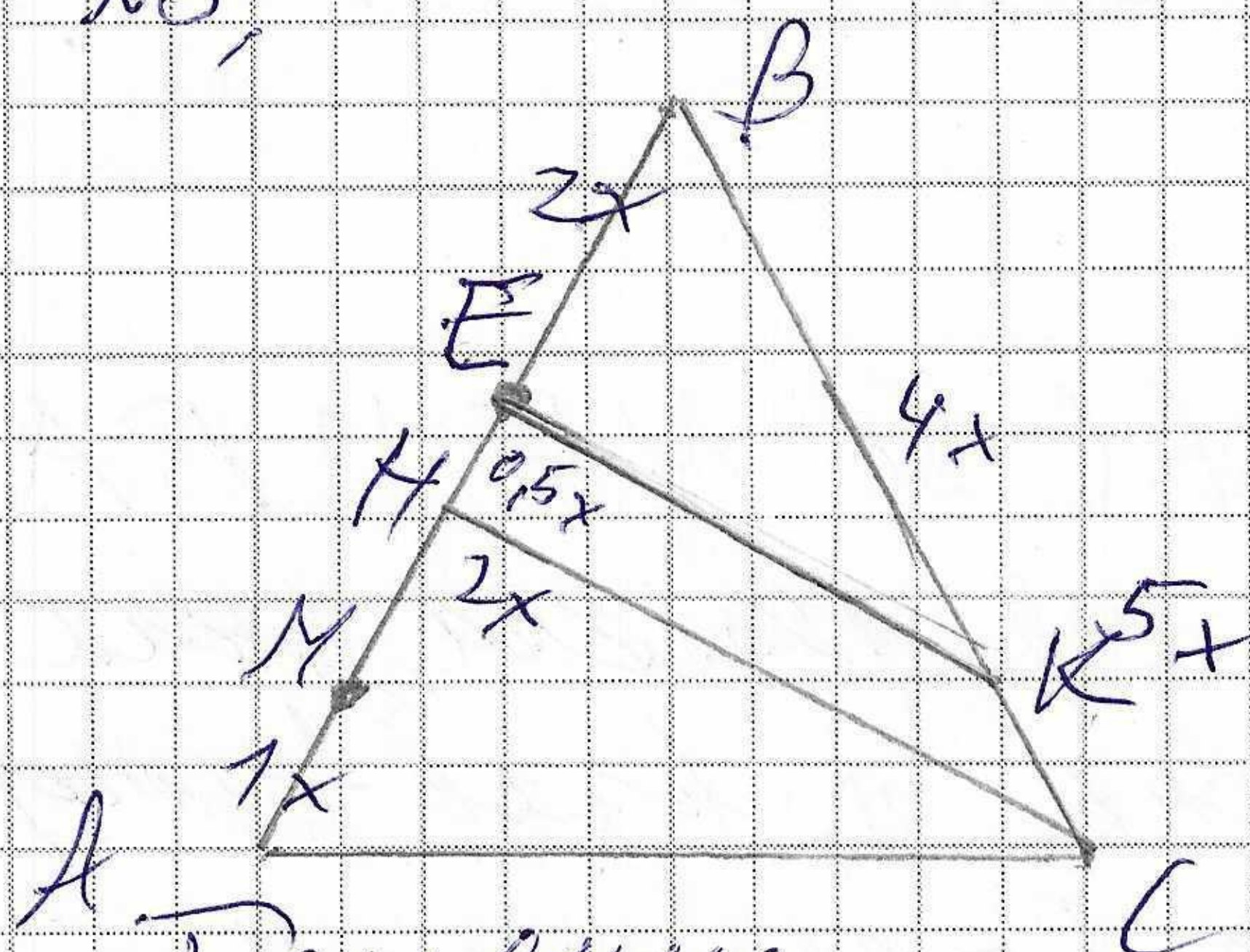
Заметим в $\triangle KDM$, что по оар тк Тупорога:

$$(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{14})^2 = (\sqrt{34})^2 = 14 + 14 = 34,$$

а значит $\angle KMD = 90^\circ$.

Ответ: $\angle KMD = 90^\circ$.

№5,



Дано: $\triangle ABC$ - равностор.

$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{4}$, EK - сред. перпен.

Найти: $\frac{S_{BCK}}{S_{ABC}} = ?$

Решение.

Возьмем $\frac{1}{5}$ стороны $\triangle ABC$ за x , тогда $AM = 1x$, $MB = 4x$, а раз EK сред. перпен., то $ME = EB = 2x$, и $\angle BEK = 90^\circ$.

Проведем выс CH , тогда $HB = 2,5x$, а $\angle BHC = 90^\circ$, а раз $HC \perp AB$ и $EK \perp AB$, то $HC \parallel EK$.

А раз $HC \parallel EK$, $EB = 2x + \frac{1}{2}HB = 2,5x$ то по оар тк, имеем $\frac{BK}{KC} = \frac{BE}{EH} = \frac{4}{1}$.

Раз $\triangle ABC$ равносторон., то $AB = BC = 5x$, тогда $BE = 4x$, а $BH = 5x$.



Вариант задания

1

Лист работы 3 из 4

По те Пифагора $\angle BHC = 90^\circ - \angle BEK$ в

$\triangle BEK$ и $\triangle BHC$:

$$BE^2 + EK^2 = BK^2$$

$$4x^2 + EK^2 = 16x^2$$

$$EK^2 = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x$$

$$BH^2 + HC^2 = BC^2$$

$$6,25x^2 + HC^2 = 25x^2$$

$$HC^2 = \sqrt{100x^2 - 25x^2}$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 2,5 \\ 2,5 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{4} = 6,25$$

$$HC = \sqrt{\frac{45}{4}x^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}x = 1,5\sqrt{5}x$$

Зная HC и EK , $HВ$ и EB , найдем $\frac{S_{\triangle BEK}}{S_{\triangle ABC}}$:

$$S_{\triangle BEK} = \frac{1}{2} \cdot EK \cdot EB$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot HC$$

$$= \frac{EK \cdot EB}{AB \cdot HC} = \frac{2\sqrt{3}x \cdot 2x}{5x \cdot 1,5\sqrt{5}x} = \frac{4}{12,5} = \frac{8}{25} = 0,32$$

№6, Ответ: $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEK}} = 0,32$

Для начала узнаем сколько нужно кубов
всего и сколько останется!

$$5000 \cdot 0,56 + 5000 \cdot 0,05 = 5000 \cdot 0,51 = 2550 \text{ м}^3$$

Теперь посчитаем $f(x, \%)$, где f - функция
выпавшая с сооружения, x - общий объем
всего, а $\%$ - это процент прироста в воде

Отсюда же найдем прирост
оставшихся в воде

$$f_1(x, \%) = 8\% = 8\% \cdot 0,4$$

$$x\% - x\% \cdot 0,4 = 0,6x\%$$

$$\text{или } f_1(x, \%) = f_1(x)$$



$$f_2(x, \%) = 0,6x\% \cdot x - 0,6x\% \cdot 0,3 = 0,42x\%$$

$$f_3(x, \%) = 0,42x\% \cdot x - 0,42x\% \cdot 0,25 = 0,315x\%$$

$$f_4(x, \%) = 0,315x\% \cdot x - 0,315x\% \cdot 0,2 = 0,252x\%$$

После 4 раз фильтр очищает воду на $0,448x\%$.

$$\%_1 = \frac{5000 - 5000 \cdot 0,448}{5000} = 0,56$$

всего воды. чистая вода

В газовой f_{01} - функция первоначальная (200 м^3),
а f_{02} - второе 500 м^3

$$f_0(x) = 200 \cdot 0,448\% = 149,6\%$$

$$\frac{f_{02}}{f_{01}} = \frac{f_{02}}{f_{01}} = 2,5$$

$$f_{02}(\%) / 500 \cdot 0,448\% = 374\%$$

После каждого нового
процента - $\frac{4850,4}{5000}$ от старого

$$\Rightarrow 0,56 \cdot \left(\frac{4850,4}{5000} \right)^{n_1} = 0,25$$

$$\%_2 = \frac{5000 - f_{01} \cdot 5000 \cdot 0,56}{5000}$$

$$= \frac{5000 - 149,6 \cdot 0,56 - 0,56 \cdot 4850,4}{5000}$$

$$= \frac{0,56 \cdot 4636}{5000}$$

Пусть n_1, n_2 кол-во очистки $\%_{02} =$

Второе вычисление первого

Первое вычисление второго, если $n_1 > 12 \text{ гмд, или}$
(с 15 мая по 15 сент.)

$$n_1 \cdot 1067 > n_2 \cdot 1067 \rightarrow \text{то } 3200 \text{ переключается}$$

Заметим, что 1067 гмд не было раньше, а

значит переключились, если & первое не было

Возьмем, что вторая очистка очищает

более $4,5 \text{ м}^3$ при $30,4 \text{ м}^3$ $\%_{02}$ нужно 5% 3200 переключается

И что в первом 15 прочтений она очистит $4850,4$ 3200 переключается

то за оставшееся время она уже очистит $4850,4$ 3200 переключается



1

Вариант задания

Лист работы 4, из 4

$\left(\frac{485}{500}\right)^{n_1} = 0,05, \Rightarrow (0,97)^{n_1}$ Знаю, что даже
100 $(0,97)^{100} < 0,05$, а это
и означает, какую-то величину
первый механизм утратит, и что с вторым
был выгоднее он должен проработать
 $\frac{2800}{3} \approx 933$, что явно > 100 . А значит
нам будет выгоднее второе.
Решив $\left(\frac{485}{500}\right)^{n_1} = 0,05$, мы узнаем затраты,
которые $= n_1 \cdot 3 + 2800$.
Ответ: выгоднее первое сооружение, для
2800 на которое будет потрачено $2800 + n_1 \cdot 3$,
где $\left(\frac{485}{500}\right)^{n_1} = 0,05$.

